Soluțiile problemelor propuse la REUM III
și baremele de notare

Centrul Olimpicilor

Mai 2026

1 Categoria JUNIORI (Clasele 7-8)

1.1 Problema 1

Se consideră următoarea ecuație în $\mathbb{N}^3$:

$$a! + b^3 = c^7$$

Demonstrați că există 3 soluții distincte.

Toader David

Barem de notare

$(a, b, c) = (0, 0, 1)$ 2p

$(a, b, c) = (1, 0, 1)$ 2p

$(a, b, c) = (5, 2, 2)$ 3p

1.2 Problema 2

Demonstrați că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $m \geq n$, $m \in \mathbb{N}$, există un $k_m \in \mathbb{N}$ și niște numere $a_1, a_2, \ldots, a_{k_m} \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $m = a_1 + a_2 + ... + a_{k_m}$ și $d(a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{k_m}) > m$.

* $d(n)$ =numărul divizorilor pozitivi lui n.

Toader David

Soluție

Vom demonstra că $n = 20$ satisface proprietatea.

Vom demonstra mai întâi că oricare ar fi $m \geq 20$ putem alege $x, y \in \mathbb{N}^*$; $x, y \geq 3$ astfel încât:
$m = 2 \cdot x + 3 \cdot y$

Caz 1) m este par alegem: $y = 4$ și $x = \frac{m-4\cdot 3}{2} \geq \frac{20-4\cdot 3}{2}$=4

Caz 2) m este impar alegem: $y = 3$ și $x = \frac{m-3\cdot 3}{2} \geq \frac{21-3\cdot 3}{2}$=6 .... 4p

Fie x cardinalul mulțimii $\{1 \le i \le k_m \mid a_i = 2\}$ și y cardinalul mulțimii $\{1 \le i \le k_m \mid a_i = 3\}$ (am ales anterior acestui pas $a_i \in \{2,3\},\ i = \overline{1,k_m}$ convenabil pentru m). Evident, $k_m = x + y$. Rămâne de arătat că:

$$d(2^x \cdot 3^y) > 2x+3y \iff (x+1)(y+1) > 2x+3y \iff xy+x+y+1 > 2x+3y \iff xy+1 > x+2y.$$

Notând $x = 3+z$, $y = 3+t$ cu $z, t \in \mathbb{N}$, inegalitatea devine echivalentă cu:
$(3+z)(3+t)+1 > 3+z+2(3+t) \iff 9+3z+3t+zt+1 > 9+z+2t \iff 1+zt+2z+t > 0$

Evident adevărat............... 3p

Remarcă
Se poate demonstra că cel mai mic n cu proprietatea din problemă este 14, iar oricare ar fi $1 \le m \le 13$, oricare ar fi $1 \le k \le m$ și oricum am alege $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}^*$ cu $m = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, atunci are loc inegalitatea $d(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k) \le m$

1.3 Problema 3

Fie $a,\ b,\ c > 0$ astfel încât $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca = 6$. Demonstrați că are loc inegalitatea:

$$24 \ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right) + 3\left(\sqrt{ab}\,(a+b) + \sqrt{bc}\,(b+c) + \sqrt{ca}\,(c+a)\right)$$

Stoicescu Alex

Soluție
Folosind ipoteza, inegalitatea ce trebuie demonstrată este echivalentă cu

$$4\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right) \ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right) + 3\left(\sqrt{ab}\,(a+b) + \sqrt{bc}\,(b+c) + \sqrt{ca}\,(c+a)\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right) + 4\left(ab+bc+ca\right) \ge 3\left(\sqrt{ab}\,(a+b) + \sqrt{bc}\,(b+c) + \sqrt{ca}\,(c+a)\right) \text{ .... } 2p$$

$$\Leftrightarrow \left(a^2+b^2+4ab-3\sqrt{ab}\,(a+b)\right) + \left(b^2+c^2+4bc-3\sqrt{bc}\,(b+c)\right) + \left(c^2+a^2+4ca-3\sqrt{ca}\,(c+a)\right) \ge 0 \text{ .... } 2p$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left(a-\sqrt{ab}+b\right) + \left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\left(b-\sqrt{bc}+c\right) + \left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2\left(c-\sqrt{ca}+a\right) \ge 0 \text{ .... } 3p$$

1.4 Problema 4

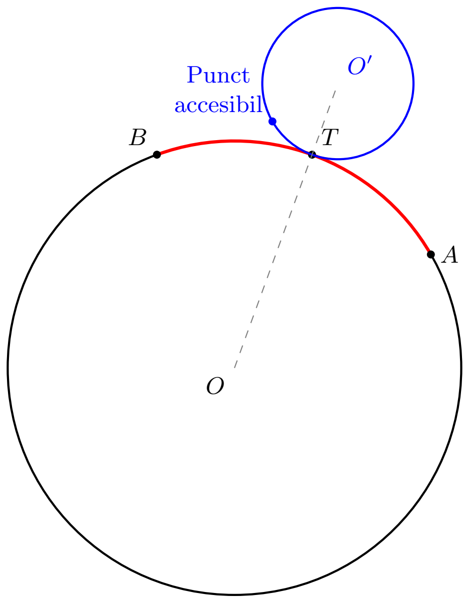
Ana și Bogdan se joacă un joc de strategie în plan. Aceștia încep de la un cerc C_0 și un punct P în exteriorul său, cât și un unghi $\theta \in (0, 2\pi)$. La fiecare pas $n \ge 1$, Bogdan alege un arc de cerc AB pe C_{n-1} având măsura θ, iar Ana construiește un cerc C_n, tangent **exterior** la C_{n-1}, astfel încât punctul de tangență se află pe AB. Ana câștigă dacă, la un anumit pas N, P aparține cercului C_N. Bogdan alege arcurile de cerc astfel încât să impiedice victoria Anei. Știind că ambii joacă optim, pentru ce valori ale lui θ poate Ana să castige?

*Două cercuri sunt considerate tangente **exterior** dacă sunt tangente și au interioarele disjuncte.

Vasile Călin

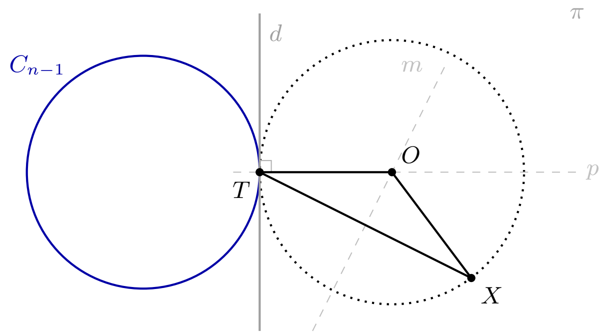
Soluție

Să ne imaginam că suntem în poziția lui Bogdan, la mutarea n. În primul rând, trebuie să ne asigurăm că Ana nu poate câștiga chiar în mutarea curenta. Odata ce fixam arcul AB pe C_{n-1}, la ce puncte X poate ajunge Ana, în functie de cum îl construiește pe C_n? Vom spune că aceste puncte sunt *accesibile*. Evident, noțiunea de accesibilitate depinde de arcul AB ales.



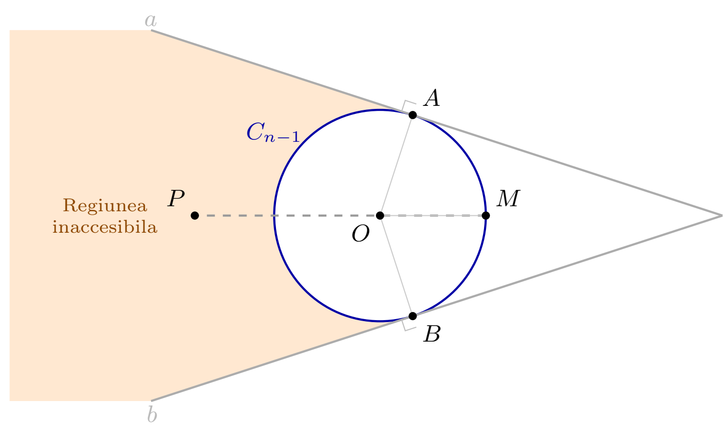
Să fixăm un punct T de pe AB. Vom spune că un punct X din exteriorul lui C_{n-1} este *accesibil din* T dacă Ana poate construi un cerc C_n tangent la C_{n-1} în T astfel încât $X \in C_n$. Ne va fi util să caracterizăm aceste puncte mai întâi.

Fie d tangenta la C_{n-1} în T, iar π semiplanul determinat de d care **nu** îl conține pe C_{n-1}. Excludem din π dreapta d. Atunci, punctele cu proprietatea căutată sunt precis cele din π. În primul rând, orice X accesibil din T trebuie să se afle în π deoarece cercul C_n este convex, neavând cum să iasă din π. În al doilea rând, putem construi un cerc C_n pentru orice $X \in \pi$. Fie m mediatoarea segmentului TX, iar p perpendiculara la d în T. Cum $\angle(p, TX) < \frac{\pi}{2}$, iar $\angle(m, TX) = \frac{\pi}{2}$, dreptele p și m se intersectează într-un punct $O \in \pi$. În plus, triunghiul $\triangle OTX$ este isoscel, cum dreapta m este înălțime și mediană. În concluzie, cercul de centru O și rază OT îl conține pe X și este tangent la C_{n-1} în T. Într-adevăr, cele două cercuri împart dreapta d ca tangentă, OT fiind perpendicular pe d.



Un punct X este accesibil dacă și numai dacă există un T pe arcul AB astfel încât X să fie accesibil din T. Mai simplu spus, mulțimea punctelor accesibile este precis reuniunea semiplanurilor π determinate anterior, considerate pentru fiecare punct de pe arcul AB. Vom fi mai interesați în mulțimea punctelor inaccesibile (din exteriorul lui C_{n-1}, desigur). Dacă Bogdan forțează punctul P să se afle în aceasta multime la fiecare mutare, Ana nu poate castiga. Reciproc, dacă Ana construiește un cerc C_{n-1} astfel încât P să fie accesibil oricum ar alege Bogdan arcul AB, aceasta va putea câștiga la următoarea mutare.

Când $0 < \theta \leq \pi$, mulțimea punctelor inaccesibile determină o regiune nemărginită. Fie a și b dreptele tangente la C_{n-1} în A, respectiv B. Un punct este inaccesibil dacă și numai dacă se afla în zona dintre a, b și C_{n-1} care nu conține arcul AB. Dacă O este centrul lui C_{n-1}, iar M mijlocul arcului AB, atunci Bogdan poate alege arcul AB astfel încât $O \in [MP]$. În acest caz, punctul P se va afla cu siguranță în mulțimea punctelor inaccesibile. Aplicând această strategie, Bogdan se asigură că Ana nu poate câștiga la mutarea n. Raționamentul fiind unul general, îl poate aplica pentru fiecare $n \geq 1$, deci Ana nu câștigă niciodată.

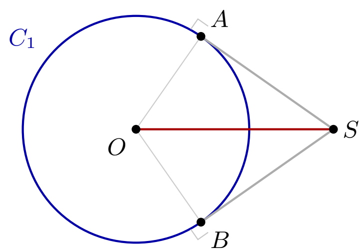


Dacă $\pi < \theta < 2\pi$, atunci Ana poate câștiga în două mutări. De data aceasta, regiunea punctelor inaccesibile este marginită, fapt pe care îl vom exploata. Putem caracteriza asemanator regiunea folosind tangentele a și b la C_{n-1} în A, respectiv B. Dacă $S = a \cap b$, atunci punctele inaccesibile sunt precis cele de pe triunghiul $\triangle SAB$ care nu se află pe C_{n-1}. În plus, observăm o condiție necesară: dacă X este inaccesibil, atunci neapărat $OX \leq OS$. Dacă Ana reușește să construiască cercul C_{n-1} astfel încât neapărat $OP > OS$, indiferent unde ar fi plasat arcul AB pe cerc, atunci P nu va avea cum să fie inaccesibil și Ana va câștiga.

Să ne imaginăm că suntem chiar la a doua mutare (deci C_{n-1} este C_1). Păstrând notațiile vechi pentru C_1 și considerând raza sa R, găsim $\angle AOB = 2\pi - \theta$, de unde $\angle SOB = \pi - \frac{\theta}{2}$, deci $\angle OSB = \frac{\theta - \pi}{2}$. De aici,

$$\sin\left(\frac{\theta - \pi}{2}\right) = \frac{R}{OS} \Leftrightarrow OS = \frac{R}{\sin\left(\frac{\theta-\pi}{2}\right)}$$

În concluzie, obținem că pentru orice punct inaccesibil X avem $OX \leq OS = \kappa R$, unde κ este o constantă "globală", care nu depinde de cerc sau de mutarea la care ne aflăm.

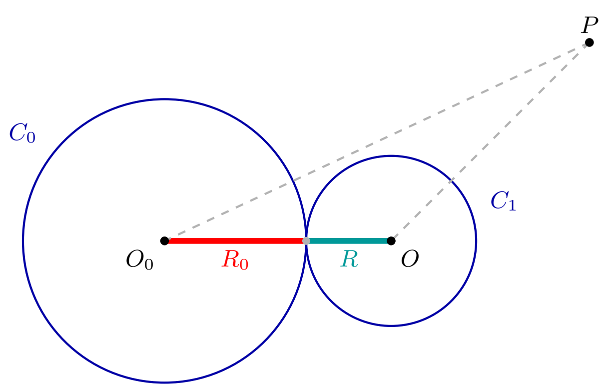


Fie O_0 și R_0 centrul, respectiv raza lui C_0. Din inegalitatea triunghiului rezultă $PO_0 \leq OP + OO_0 = OP + R + R_0$. Dacă P ar fi inaccesibil (relativ la C_1 și o alegere a arcului AB), atunci am avea că $PO_0 \leq (1+\kappa)R + R_0$, ceea ce este echivalent cu

$$\frac{PO_0 - R_0}{1+\kappa} \leq R$$

Astfel, P poate fi inaccesibil doar dacă R satisface aceasta inegalitate. Membrul stâng este constant, în timp ce cel drept, raza lui C_1, este complet la alegerea Anei. Alegându-l pe R mai mic decât membrul stang, condiția nu va mai fi indeplinită, iar punctul P va fi neapărat accesibil. Astfel, Ana va câștiga.

Așadar, Ana poate câștiga dacă și numai dacă $\theta \in (\pi, 2\pi)$.



Barem de notare

Caracterizarea punctelor accesibile/inaccesibile 3p

•Descrierea regiunii accesibile............... 1p

•Demonstrarea riguroasă și corectă a caracterizării............... 1.5p

•Descrierea regiunii inaccesibile............... 0.5p

Rezolvarea cazului $0 < \theta \leq \pi$ 1p

Rezolvarea cazului $\pi < \theta < 2\pi$ 3p

•Demonstrarea riguroasă și corectă a dependenței dintre OS și R 1p

•Descrierea strategiei Anei de a alege R mic. (Dacă strategia este abordată intuitiv, neriguros, se va acorda doar 1p) 2p

2 Categoria SENIORI (Clasele 9-12)

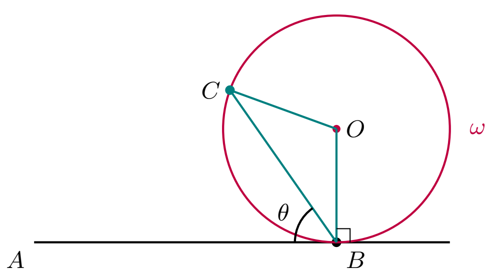
2.1 Problema 1

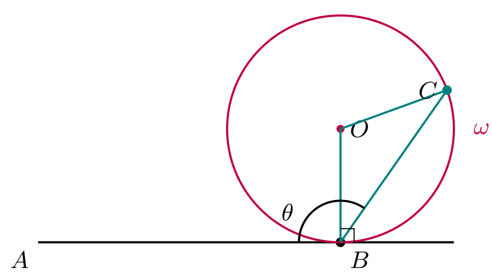
Fie ω un cerc de diametru 1 și AB un segment tangent la ω în punctul B. Dacă $C \in \omega$ este un punct diferit de B, arătați că $BC = \sin(\angle ABC)$.

Vasile Călin

Soluție

Fie O centrul cercului și $\theta = \angle ABC$. Atunci $\angle BOC$ este egal cu 2θ pentru $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ si cu $2\pi - 2\theta$ pentru $\theta > \frac{\pi}{2}$. În ambele cazuri obținem $\cos(\angle ABC) = \cos(2\theta)$, cum funcția cos este pară și are perioada 2π.





Din teorema cosinusului, aplicată în $\triangle BOC$, avem

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2OB \cdot OC \cdot \cos(\angle ABC) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2\theta)$$

Folosim identitatea trigonometrică $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ pentru a obține

$$BC^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2(\theta)\right) = \sin^2(\theta)$$

deci, $BC = \sin\theta$.

Barem de notare

Demonstrarea formulei $\cos(\angle ABC) = \cos(2\theta)$ 2.5p

Aplicarea teoremei cosinusului in $\triangle BOC$ 1.5p

Utilizarea identității $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ pentru a obține $BC^2 = \sin^2(\theta)$ 2.5p

Finalizarea soluției 0.5p

2.2 Problema 2

Notăm cu $d(n)$ numărul divizorilor pozitivi ai lui n.

a) Demonstrați că $d(n) \leq 2\sqrt{n}$

b) Găsiți toate numerele $k \in \mathbb{N}$ pentru care inegalitatea: $d(a_1 \cdot a_2 \cdot .... \cdot a_k) \leq a_1 + a_2 + ... + a_k$ are loc, oricare ar fi $a_i \in \mathbb{N}^*$, $i = \overline{1, k}$.

Toader David

Soluție

a) Formăm mulțimi de câte 2 elemente de tipul $\{t, \frac{n}{t}\}$, pentru t divizor al lui n; excepție putând fi doar $\sqrt{n}$ (dacă acesta este natural), care va forma singur o mulțime. Fiecare mulțime conține un element cel mult egal cu $\sqrt{n}$(cel mai mic din fiecare mulțime). Numărul de divizori este maxim 2$\cdot$numărul de elemente din mulțimi (deoarece acestea sunt disjuncte), care este cel mult $2\sqrt{n}$ 2p

b) Vom demonstra că singurele numere care satisfac ipoteza sunt 1 și 2.

Pentru $k = 1$ folosim identitatea de la a), și obținem: $d(a_1) \leq 2\sqrt{a_1}$, iar $2\sqrt{a_1} \leq a_1$ pentru $a_1 \geq 4$. Astfel, singurele cazuri care mai sunt de verificat sunt: $a_1 \in \{1, 2, 3\}$, care convin.

($d(1) = 1$, $d(2) = 2$, $d(3) = 2 \leq 3$)

Pentru $k = 2$, aplicând subpunctul a) obținem: $d(a_1 a_2) \leq 2\sqrt{a_1 a_2}$; iar din inegalitatea mediilor obținem: $2\sqrt{a_1 a_2} \leq a_1 + a_2$ 2p

Pentru $k = 3$ alegem drept contraexemplu: $a_1 = 4$; $a_2 = 5$; $a_3 = 6$; astfel: $d(a_1 a_2 a_3) = d(2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$; iar $a_1 + a_2 + a_3 = 4 + 5 + 6 = 15 < 16 = d(a_1 a_2 a_3)$ 1p

Pentru $k \geq 4$ alegem: $a_1 = a_2 = 4$ și $a_3 = a_4 = ... = a_k = 3$. Astfel $d(a_1 a_2 ... a_k) = d(2^4 \cdot 3^{k-2}) = 5(k-1) = 5k - 5$; iar $a_1 + a_2 + ... + a_k = 3(k-2) + 8 = 3k + 2$; este suficient să arătăm că: $5k - 5 > 3k + 2 \iff 2k > 7 \iff k \geq 4$ 2p

2.3 Problema 3

Pentru două mulțimi $A, B \subseteq \mathbb{R}$, notăm $BA = \{ba \mid b \in B, a \in A\}$.

Fie $X \subseteq \mathbb{R}$ o mulțime finită, nevidă. Definim șirul $(X_n)_{n \geq 1}$ prin: $X_1 = X \subseteq \mathbb{R}, X_{n+1} = X_n X, \forall n \geq 1$. Aflați toate mulțimile X cu proprietatea că șirul $(|X_n|)_{n \geq 1}$ este mărginit.

* $|X|$ este cardinalul mulțimii $X \subseteq \mathbb{R}$.

Dragomir Eduard

Soluție

Vom începe prin a demonstra următoarea afirmație : Șirul $x_n =\mid X_n \mid$ este crescător. Evident, dacă $X = \{0\}$ atunci $X_n = \{0\}$ și deci cerința este verificată. Vom trata în ceea ce urmează cazul in care

$X \neq \{0\}$, adică există $u \in X$ cu $u \neq 0$. Fie $n \geq 1$, atunci $uX_n \subseteq X_nX$, deci $x_n = \mid X_n \mid = \mid uX_n \mid \leq \mid XX_n \mid = x_{n+1}$, astfel concluzionăm că x_n este crescător............... 2p

Cum x_n este mărginit si crescător, concluzionăm că acesta este staționar (este constant de la un rang încolo) 1p

Fie $n = N$ acest rang. Avem, $x_{n+1} = x_n$, deci $\mid XX_n \mid = \mid X_n \mid$. Fie $u \in X$ cu $u \neq 0$ atunci: $\mid uX_n \mid = \mid X_n \mid$. Astfel, obținem că dacă am două numere distincte nenule din X fie ele u, v atunci $uX_n = vX_n$, deoarece altfel $uX_n \cup vX_n \subseteq XX_n$, iar $uX_n \cup vX_n$ ar avea cardinal cel puțin $\mid X_n \mid +1$. Fie $t \in X_n$ cu cel mai mare modul, atunci in mulțimile uX_n si vX_n, ut respectiv vt sunt elementele de modul maximal. Cum mulțimile sunt egale, reiese că aceste elemente au modul egal, deci $\mid u \mid = \mid v \mid$. Cum u, v au fost alese aleatoriu peste elementele nenule ale lui X, obținem că X are cel mult 2 elemente nenule. Pe de altă parte, se verifică că toate mulțimile de forma $\{-x, 0, x\}, \{-x, x\}, \{0, x\}, \{x\}, \{0\}$ sunt soluții, deci soluția generală este dată de :

$$X = uS, \text{ unde } u \text{ e real, iar S} \subseteq \{-1, 0, 1\}, S \neq \emptyset \text{ .... } 4p$$

*Pentru enumerarea completă a soluțiilor, și verificarea satisfacerii proprietăților cerute pentru aceste soluții, se va puncta 1p.

2.4 Problema 4

Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a + b + c + 1 \leq 4abc$. Determinați valoarea maximă a următoarei expresii:

$$\frac{9}{a^2 + b + 13} + \frac{25}{b^2 + c + 23} + \frac{49}{c^2 + a + 33}$$

Stoicescu Alex

Soluție

$$a + b + c + 1 \leq 4abc \Leftrightarrow \frac{1}{1 + 2a} + \frac{1}{1 + 2b} + \frac{1}{1 + 2c} \leq 1 \text{ .... } 2p$$

Din inegalitatea CBS (forma Titu Andreescu),

$$\frac{9}{a^2 + b + 13} \leq \frac{4}{10} + \frac{1}{a^2 + b + 3}$$

$$\frac{25}{b^2 + c + 23} \leq \frac{16}{20} + \frac{1}{b^2 + c + 3}$$

$$\frac{49}{c^2 + a + 33} \leq \frac{36}{30} + \frac{1}{c^2 + a + 3} \text{ .... } 3p$$

Așadar,

$$\frac{9}{a^2 + b + 13} + \frac{25}{b^2 + c + 23} + \frac{49}{c^2 + a + 33} \leq \frac{12}{5} + \sum_{cyc} \frac{1}{a^2 + b + 3}$$

Din nou, din inegalitatea CBS,

$$\sum_{cyc} \frac{\frac{25}{4}}{a^2+b+3} \le \sum_{cyc} \left(\frac{\frac{9}{4}}{a^2+2} + \frac{1}{b+1} \right) \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1}{a^2+b+3} \le \frac{4}{25} \cdot \sum_{cyc} \left(\frac{\frac{9}{4}}{a^2+2} + \frac{1}{b+1} \right) \text{ .... } 1p$$

Din inegalitatea mediilor AM-GM,

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2+2} = \sum_{cyc} \frac{1}{a^2+1+1} \le \sum_{cyc} \frac{1}{2a+1} \le 1$$

Din inegalitatea CBS,

$$\frac{1}{3} + \sum_{cyc} \frac{1}{2a+1} = \sum_{cyc} \left(\frac{1}{2a+1} + \frac{\frac{1}{9}}{1} \right) \ge \sum_{cyc} \frac{\frac{16}{9}}{2a+2} = \frac{16}{18} \cdot \sum_{cyc} \frac{1}{a+1} = \frac{8}{9} \sum_{cyc} \frac{1}{a+1}$$

Ținând cont de ipoteză, obținem

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a+1} \le \frac{3}{2}$$

În final,

$$\frac{9}{a^2+b+13} + \frac{25}{b^2+c+23} + \frac{49}{c^2+a+33} \le \frac{12}{5} + \sum_{cyc} \frac{1}{a^2+b+3} \le \frac{12}{5} + \frac{4}{25} \cdot \sum_{cyc} \left(\frac{\frac{9}{4}}{a^2+2} + \frac{1}{b+1} \right) \le \frac{12}{5} + \frac{4}{25} \cdot \frac{9}{4} + \frac{4}{25} \cdot \frac{3}{2} = 3$$

Egalitatea are loc pentru $(a, b, c) = (1, 1, 1)$.............. 1p

*Cazul de egalitate lipsit de o idee conducătoare la un rezultat va fi punctat cu 0p.