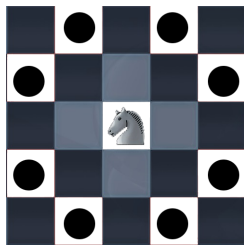




## 1.2 Problema 2

Fie o tablă de șah  $n \times n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pe tablă se scriu numerele de la 1 la  $n^2$  în ordine crescătoare, de sus în jos, începând cu liniile, de la stânga la dreapta. Vom spune că un cal este caracatiță dacă toate cele 8 câmpuri pe care le atacă sunt pe tablă. Mai mult, o caracatiță este interesantă dacă cel mai mare divizor comun al celor 8 câmpuri pe care le atacă este diferit de 1. Determinați numerele  $n$  pentru care există o caracatiță interesantă.



Dragomir Eduard

### Soluție

Fie  $n$  un număr cu proprietatea din enunț. Pentru început, vom demonstra că  $n$  este impar. Fie  $k$  numărul scris pe cel mai de sus câmp atacat de cal, dar și cel mai din stânga de pe acea linie. Atunci, celelalte câmpuri vor avea următoarele numere :  $k+2, n+k-1, n+k+3, 3n+k-1, 3n+k+3, 4n+k, 4n+k+2$ . Cel mai mare divizor comun al acestor numere trebuie să fie diferit de 1, dar  $(k, k+2) \leq 2$ , deci :  $(k, k+2, n+k-1, n+k+3, 3n+k-1, 3n+k+3, 4n+k, 4n+k+2) = 2$ . De aici, obținem că  $n$  este impar. Pentru existența unei caracatițe, este necesar ca tabla să aibă minim 5 coloane, deci  $n \geq 5$ . Pentru  $n \geq 5$ ,  $n$  impar, putem alege să poziționăm calul în centrul tablei. În concluzie,  $n \geq 5, n \equiv 1 \pmod{2}$ .

Barem de notare:

Determinarea coordonatelor câmpurilor atacate ..... 2p

Demonstrare  $n$ -impar ..... 2p

Justificare  $n \geq 5$  ..... 1p

Exemplu ..... 2p

### 1.3 Problema 3

Fie  $n \geq 2$  un număr natural. Considerăm  $M$  mulțimea punctelor de coordonate întregi  $(x, y)$  cu  $0 < x, y \leq n$ .

Pentru un număr natural  $k$  fixat,  $2 \leq k \leq n^2$ , considerăm  $k$  puncte distincte din  $M$ , notate  $A_1, A_2, \dots, A_k$ .

Determinați cea mai mică valoare pe care o poate lua suma  $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{k-1}A_k + A_kA_1$ .

\*Am notat cu  $A_iA_j$  lungimea segmentului determinat de punctele  $A_i$  și  $A_j$ .

Toader David Ștefan

#### Soluție

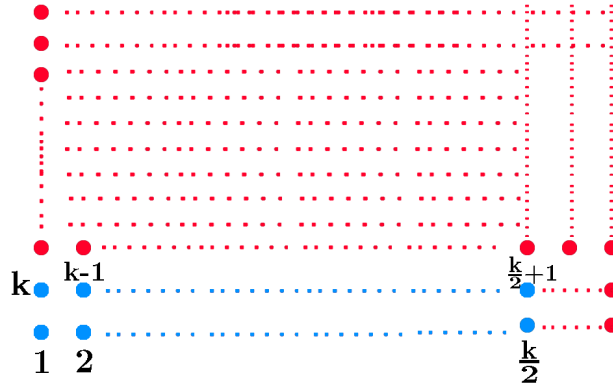
Spunem că minimum sumei  $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{k-1}A_k + A_kA_1$  este scorul lui  $k$ .

Vom demonstra că scorul lui  $k$  este  $k$ , pentru  $k$  par, și  $k - 1 + \sqrt{2}$ , pentru  $k$  impar.

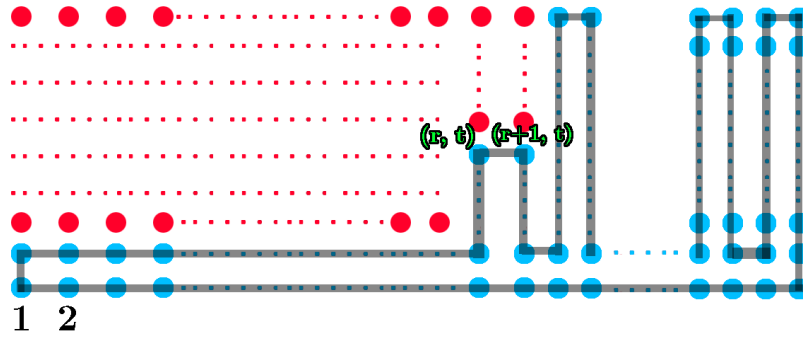
Pentru  $k$  par, demonstrăm că scorul lui  $k$  pentru jocul  $n^2$  este cel puțin  $k$ . Acest lucru se întâmplă deoarece  $A_iA_{i+1}$  (indici modulo  $n$ ) este cel puțin 1.

Pentru  $k$  impar, este suficient să demonstrăm că scorul lui  $k$  pentru jocul  $n^2$  nu poate fi  $k$ , deoarece  $k - 1 + \sqrt{2}$  este al doilea cel mai mic scor posibil. Presupunem că există un  $k$  impar, astfel încât scorul lui  $k$  în jocul  $n^2$  este  $k$ . Asta înseamnă că  $A_iA_{i+1} = 1$ , oricare ar fi  $i = \overline{1, n}$ . Dacă 2 puncte din  $M$ ,  $A$  și  $B$  sunt la distanța 1, atunci, pentru a parcurge  $[AB]$ , trebuie să efectuăm o singură mutare (de o pătrățică), fie la dreapta, stânga, sus sau jos. Fie  $x$  numărul mutărilor la dreapta din desen. Atunci, pentru ca la finalul tuturor parcurgerilor să ajungem din nou în  $A_1$ , numărul mutărilor la stânga este tot  $x$ . Analog, dacă numărul mutărilor în sus este  $y$ , numărul mutărilor în jos este tot  $y$ . Numărul total al mutărilor este  $2x + 2y$  (par), care este totodată și  $k$  (impar), contradicție, deci presupunerea a fost falsă, așadar scorul lui  $k$  (impar) pentru jocul  $n^2$  este cel puțin  $k - 1 + \sqrt{2}$ .

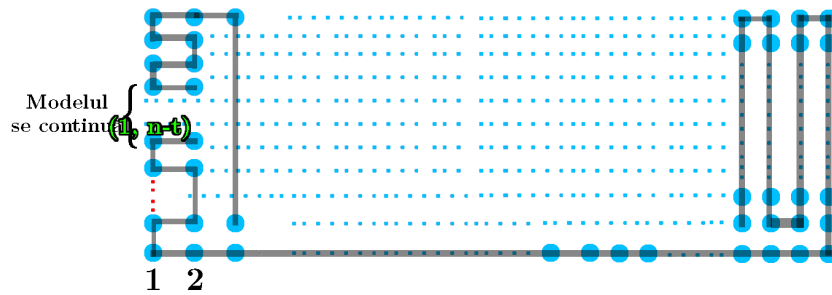
Urmează să arătăm că în ambele cazuri, minimum precizat se poate atinge. Pentru fiecare dintre cazuri, este atașată câte o poza pentru modul de construcție al exemplelor. Exemplele date sunt doar pentru  $k$  (par), deoarece pentru exemplele cu  $k$  (impar),  $k \neq n^2$ , putem considera cazul  $k + 1$  și configurațiile aferente, care vor avea  $A_{k-1}$  la distanță  $\sqrt{2}$  de  $A_1$ , deci putem considera în acest caz, configurația pentru  $k$  formată din toate aceste puncte, fără  $A_k$ . Cazul  $k$  (impar) =  $n^2$  va fi tratat separat. (Punctele albastre sunt cele alese în configurație, și traseul este cel negru.)



Caz 1, Subcaz 1:  $n$  impar,  $k$  par,  $2 \leq k \leq 2n$

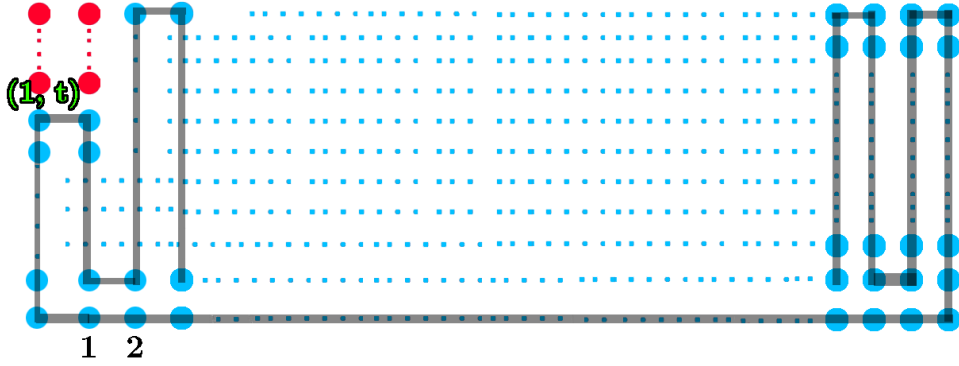


Caz 1, Subcaz 2:  $n$  impar,  $k$  par,  $2n + 2 \leq k \leq n^2 - n + 2$ . Va exista  $2 \leq r \leq n - 1$ ,  $r$  par și  $2 \leq t \leq n$ ,  $r, t \in \mathbb{N}$ , astfel încât  $k = 2n + (n - 2) \cdot (n - r - 1) + 2t - 4$ .



Caz 1, Subcaz 3:  $n$  impar,  $k$  par,  $n^2 - 1 \leq k \leq n^2 - n + 3$ . Va exista  $t \leq n - 3$ ,  $t$  par, astfel încât  $k = n^2 - n + 2 + t$ ,  $t \in \mathbb{N}$ .





Caz 2, Subcaz 3:  $n$  par,  $k$  par,  $n^2 - 2n + 4 \leq k \leq n^2$ . Va exista  $t \geq 2$  astfel încât  $k = n^2 - 2(n - t)$ ,  $t \in \mathbb{N}$ .

Barem de notare:

Precizarea minimului pentru fiecare dintre cazurile de paritate ale lui  $k$  ..... 1p

Demonstrarea faptului că minimul scorului pentru  $k$  (par) este  $\geq$  cu  $k$  ..... 1p

Demonstrarea faptului că minimul scorului pentru  $k$  (impar) este  $\geq$  cu  $k - 1 + \sqrt{2}$  ..... 2p

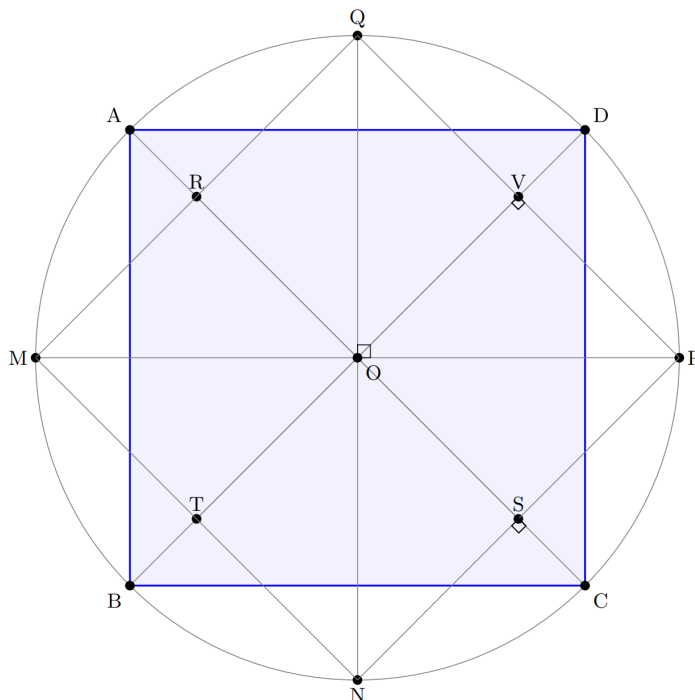
Exemple ..... 3p

## 1.4 Problema 4

Fie  $ABCD$  un patrulater inscriptibil, iar  $I_1$ , respectiv  $I_2$ , centrele cercurilor înscrise triunghiurilor  $ADB$ , respectiv  $BCD$ .  $DI_1$ ,  $DI_2$ ,  $BI_2$ , respectiv  $BI_1$  intersecțează cercul circumscris patrulaterului  $ABCD$  în punctele  $M$ ,  $N$ ,  $P$ , respectiv  $Q$ . Dacă diagonalele patrulaterelor  $ABCD$  și  $MNPQ$  se intersecțează în același punct, iar  $AC$ , respectiv  $BD$  intersecțează  $(MQ)$ , respectiv  $(MN)$  în mijloacele acestora, demonstrați că  $ABCD$  este pătrat.

Stoicescu Alex

### Soluție



Fie intersecția diagonalelor celor două patrulatere în  $O$ . Considerăm  $AC \cap MQ = \{R\}$ ,  $AC \cap NP = \{S\}$ ,  $BD \cap MN = \{T\}$ ,  $BD \cap PQ = \{V\}$ .

$$\text{Avem } \angle PON = \frac{\widehat{PC} + \widehat{CN} + \widehat{AQ} + \widehat{AM}}{2} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA}}{4} = 90^\circ.$$

Deci,  $MNPQ$  este ortodiagonal.

Cum punctul  $R$  este mijlocul segmentului  $(MQ)$ , din Teorema Mediane rezultă  $OR = QR = RM$ , deci  $\angle OQR = \angle QOR$ .

$MNPQ$  este inscriptibil, deci  $\angle MQN = \angle MPN$ .

Cum  $R, O, S$  sunt coliniare, iar  $\angle POQ = 90^\circ$ , avem  $\angle POS = 90^\circ - \angle QOA$ . Din  $\angle OPS = \angle MQO = \angle QOA$ , rezultă  $\angle PSO = 90^\circ$ , adică  $AC \perp NP$ .

În mod analog, obținem  $BD \perp PQ$ .

$$90^\circ = \angle DVP = \frac{\widehat{DP} + \widehat{AQ} + \widehat{AM} + \widehat{MB}}{2}$$

$$90^\circ = \angle ASN = \frac{\widehat{AM} + \widehat{MB} + \widehat{BN} + \widehat{PC}}{2} = \frac{\widehat{AM} + \widehat{MB} + \widehat{BN} + \widehat{DP}}{2}$$

Scăzând cele două relații, avem  $\widehat{AQ} = \widehat{BN} \Leftrightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC}$ .

$$90^\circ = \angle CSN = \frac{\widehat{CN} + \widehat{AQ} + \widehat{QD} + \widehat{DP}}{2}$$

$$90^\circ = \angle PON = \frac{\widehat{PC} + \widehat{CN} + \widehat{AQ} + \widehat{AM}}{2} = \frac{\widehat{DP} + \widehat{CN} + \widehat{AQ} + \widehat{MB}}{2}$$

Scăzând cele două relații, avem  $\widehat{QD} = \widehat{MB} \Leftrightarrow \widehat{AD} = \widehat{AB}$

$\Rightarrow \widehat{AQ} = \widehat{AM} \Rightarrow AQ = AM$ , deci triunghiul  $AQM$  este isoscel cu baza  $(QM)$ . Cum  $R$  este mijlocul segmentului  $(QM)$ , avem  $AR \perp MQ$ , deci  $\angle ARM = 90^\circ$ .

$$90^\circ = \angle ARM = \frac{\widehat{AM} + \widehat{DQ} + \widehat{DP} + \widehat{PC}}{2}$$

$$90^\circ = \angle MOQ = \frac{\widehat{AM} + \widehat{AQ} + \widehat{CN} + \widehat{CP}}{2} = \frac{\widehat{AM} + \widehat{DQ} + \widehat{BN} + \widehat{DP}}{2}$$

Scăzând cele două relații, avem  $\widehat{PC} = \widehat{BN} \Leftrightarrow \widehat{CD} = \widehat{BC}$ .

Deci,  $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DA} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ , așadar  $ABCD$  este pătrat.  $\square$

Barem de notare:

Demonstrarea faptului că  $MNPQ$  este ortodiagonal ..... 1p

Demonstrare  $AC \perp PN$  și  $BD \perp PQ$  ..... 2p

Demonstrare  $\widehat{AD} = \widehat{AB} = \widehat{BC}$  ..... 2p

Demonstrare  $\widehat{CD} = \widehat{BC}$  și concluzionarea ..... 2p

## 2 Categoria SENIORI (Clasele 9-12)

### 2.1 Problema 1

Fie triunghiul  $ABC$ . Fie  $D$  pe latura  $AB$  și  $E$  pe latura  $AC$  astfel încât  $\frac{AD}{DB} = x$  și  $\frac{AE}{EC} = y$ . Considerăm  $P$  intersecția dreptelor  $CD$  și  $BE$ . Arătați că :

$$\frac{BP}{PE} = \frac{y+1}{x}$$

Toader David Ștefan

#### Soluție

Fie  $F$  intersecția dreptelor  $AP$  și  $BC$

Din teorema lui Ceva in triunghiul  $ABC$  :

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

Deci :

$$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{1}{y} \cdot x = 1$$

$$\frac{BF}{FC} = \frac{y}{x}$$

Totodată , din teorema lui Van Aubel :

$$\frac{BP}{PE} = \frac{BF}{FC} + \frac{BD}{DA}$$

$$\frac{BP}{PE} = \frac{y}{x} + \frac{1}{x} = \frac{y+1}{x}$$

O finalizare alternativă constă în demonstrația efectivă a teoremei lui Van Aubel.

Aplicăm teorema lui Menelaos în triunghiul  $BAE$  pentru transversala  $D - P - C$ :

$$\frac{BD}{DA} \cdot \frac{AC}{EC} \cdot \frac{EP}{PB} = 1$$

Deci :

$$\frac{BD}{DA} = \frac{BP}{PE} \cdot \frac{CE}{AC} \quad (1)$$

Analog , din teorema lui Menelaos în triunghiul  $BEC$  cu transversala  $A - P - F$ :

$$\frac{BP}{PE} \cdot \frac{EA}{CA} \cdot \frac{CF}{FB} = 1$$

Deci :

$$\frac{BF}{FC} = \frac{BP}{PE} \cdot \frac{AE}{AC} \quad (2)$$

Insumând (1) și (2) obținem teorema lui Van Aubel, și efectuând calculele din finalizarea anterioară obținem rezultatul cerut.

Barem de notare:

Considerarea intersecției dintre  $AP$  și  $BC$  ..... 3p

Aflarea raportului  $\frac{BF}{FC}$  ..... 2p

Concluzionarea prin Teorema lui Van Aubel ..... 2p

## 2.2 Problema 2

Fie  $p$  un număr prim. Demonstrați că ecuația :

$$y^{p^2} = p + x^p$$

Nu are soluții în  $\mathbb{Z}^2$ .

Dragomir Eduard

### Soluție

Folosind mica teoremă a lui Fermat, obținem :

$$y^p \equiv y \pmod{p} \implies (y^p)^p \equiv y^p \pmod{p} \implies y^{p^2} \equiv y^p \pmod{p}$$

În același timp, avem :

$$x^p \equiv x \pmod{p}$$

Considerând ecuația mod  $p$ , avem :

$$y^{p^2} \equiv x^p \pmod{p} \implies y^p \equiv x \pmod{p} \implies p | (y^p - x)$$

Rescriind, obținem :

$$y^{p^2} - x^p = p \iff (y^p)^p - x^p = p \iff (y^p - x) \left( \sum_{l=0}^{p-1} (y^p)^{p-1-l} x^l \right) = p$$

De aici, avem că :  $y^p - x = \pm p$ , deci :  $y^p = x \pm p$ . Ecuația se rescrie :

$$(x \pm p)^p = p + x^p \iff \sum_{l=0}^p x^{p-l} \binom{p}{l} (\pm p)^l = p + x^p \iff S = \sum_{l=1}^p \binom{p}{l} x^{p-l} (\pm p)^l = p$$

Pentru  $l \geq 2$ , avem că :  $p^2 | (p^l x^{p-l} \binom{p}{l})$ . Când  $l = 1$ , demonstrăm că :  $p^2 | \binom{p}{1} p x^{p-1} \iff p^2 | p^2 x^{p-1}$ , clar adevărat. Deci,  $p^2 | S = p \implies \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}$ , fals. În concluzie, nu există soluții în  $\mathbb{Z}$ .

Barem de notare:

Demonstrarea  $p | (y^p - x)$  ..... 3p

Justificarea  $y^p - x = \pm p$  ..... 1p

Concluzionarea si finalizare ..... 3p

## 2.3 Problema 3

Fie  $a, b, c > 0$  astfel încât  $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = 6$ . Demonstrați că au loc inegalitățile:

a)  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3 \geq ab + bc + ca$

b)

$$\frac{a^2}{(b+c)^3} + \frac{b^2}{(c+a)^3} + \frac{c^2}{(a+b)^3} \geq \frac{1}{a^2 + b^2 + 2(a+b+c)} + \frac{1}{b^2 + c^2 + 2(a+b+c)} + \frac{1}{c^2 + a^2 + 2(a+b+c)}$$

Stoicescu Alex

### Soluție

a) Folosind cunoscuta inegalitate  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ , obținem rezultatul cerut.

b) Inegalitatea fiind simetrică, putem considera  $a \geq b \geq c$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{a^2}{b+c} &\geq \frac{b^2}{a+c} \geq \frac{c^2}{a+b} \\ \Rightarrow \frac{1}{(b+c)^2} &\geq \frac{1}{(a+c)^2} \geq \frac{1}{(a+b)^2} \end{aligned}$$

Din inegalitatea lui Cebășev,

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{(b+c)^3} = \sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} \cdot \frac{1}{(b+c)^2} \geq \frac{\left(\sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c}\right) \left(\sum_{cyc} \frac{1}{(b+c)^2}\right)}{3}$$

Avem  $a^2 \geq b^2 \geq c^2$  și  $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{b+c}$ . Din nou, din inegalitatea lui Cebășev,

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} = \sum_{cyc} a^2 \cdot \frac{1}{b+c} \geq \frac{\left(\sum_{cyc} a^2\right) \left(\sum_{cyc} \frac{1}{b+c}\right)}{3}$$

Avem  $6 = \sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab \leq 2 \sum_{cyc} a^2 \Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2 \geq 3$

$$6 = \sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab \Leftrightarrow 12 = (a+b+c)^2 + \sum_{cyc} a^2 \geq (a+b+c)^2 + \frac{(a+b+c)^2}{3} \Leftrightarrow a+b+c \leq 3.$$

Aplicând inegalitatea dintre media aritmetică și media armonică,  $\sum_{cyc} \frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2(a+b+c)} \geq \frac{3}{2}$ .

Deci,

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} \geq \frac{3}{2}$$

Așadar, avem

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{(b+c)^3} \geq \frac{1}{2} \left( \sum_{cyc} \frac{1}{(b+c)^2} \right)$$

Din cunoscuta inegalitate  $\sum_{cyc} x^2 \geq \sum_{cyc} xy$  pentru  $(x, y, z) \rightarrow \left(\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}\right)$ , avem  $\sum_{cyc} \frac{1}{(a+b)^2} \geq \sum_{cyc} \frac{1}{(a+b)(a+c)}$ .

Din nou, aplicând inegalitatea dintre media aritmetică și media armonică,

$$\sum_{cyc} \frac{1}{(a+b)(a+c)} = \frac{1}{2} \sum_{cyc} \left( \frac{1}{a^2 + \sum_{cyc} ab} + \frac{1}{b^2 + \sum_{cyc} ab} \right) \geq 2 \sum_{cyc} \frac{1}{a^2 + b^2 + 2(\sum_{cyc} ab)}$$

Cum

$$6 = \sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab \geq 2 \sum_{cyc} ab \Leftrightarrow \sum_{cyc} ab \leq 3$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2 = \sum_{cyc} a^2 + 2 \sum_{cyc} ab \geq 3 \sum_{cyc} ab \geq \left( \sum_{cyc} ab \right)^2 \Leftrightarrow \sum_{cyc} a \geq \sum_{cyc} ab$$

Deci,

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2}{(b+c)^3} \geq \sum_{cyc} \frac{1}{a^2 + b^2 + 2(ab + bc + ca)} \geq \sum_{cyc} \frac{1}{a^2 + b^2 + 2(a+b+c)}$$

Barem de notare:

a) Utilizarea inegalității  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$  ..... 1p

b) Considerarea unei ordini și aplicarea Inegalității lui Cebâșev într-un mod conducător la rezultatul dorit ..... 2p

Aplicarea inegalității lui Cebâșev, și demonstrarea unei inegalități auxiliare conducătoare la rezultatul dorit ..... 2p

Demonstrarea inegalității  $a + b + c \geq ab + bc + ca$  ..... 2p

\*Considerarea unei ordini și aplicarea unei inegalități neconducătoare la un rezultat se va puncta cu 0 puncte.

\*Nu se punctează menționarea cazului de egalitate.

## 2.4 Problema 4

Determinați toate funcțiile  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  care satisfac :

$$f(f(x)(1+y)) = f(x) + f(xy), \quad \forall x, y > 0$$

Dragomir Eduard

### Soluție

Fie  $x_1, x_2 > 0$  astfel încât  $f(x_1) = f(x_2)$ . Presupunem prin absurd că  $x_1 \neq x_2$ , atunci, fără a restrânge generalitatea, putem considera  $x_1 > x_2$ .

$$f(f(x_1)(1+y)) = f(f(x_2)(1+y)) = f(x_1) + f(x_1y) = f(x_2) + f(x_2y), \quad \forall y > 0$$

De unde obținem :

$$f(x_1y) = f(x_2y), \quad \forall y > 0$$

Se demonstrează inductiv că :  $f(y) = f((\frac{x_1}{x_2})^n y), \forall y > 0, n \in \mathbb{N}^*$ . Cum  $x_1 > x_2$ , pot alege  $N \in \mathbb{N}$  astfel încât :

$$\frac{(\frac{x_1}{x_2})^N}{f(1)} > 1 \quad (\text{Se alege } N > \lfloor \log_{\frac{x_1}{x_2}} f(1) \rfloor)$$

Acum, alegând  $y = \frac{(\frac{x_1}{x_2})^N}{f(1)} - 1 > 0$  și  $x = 1$ , obținem :

$$f((\frac{x_1}{x_2})^N) = f(1) + f(y) \implies f((\frac{x_1}{x_2})^N \cdot 1) - f(1) = f(y) = 0 > 0$$

Clar o contradicție, deci  $x_1 = x_2$ . Trecând  $x$  în 1, avem că :

$$f(f(1)(1+y)) = f(1) + f(y), \quad \forall y > 0$$

Acum, alegând  $y = \frac{1}{x}$ , obținem :

$$f(f(x)(1 + \frac{1}{x})) = f(x) + f(1) \quad , \text{dar} \quad f(f(1)(1+x)) = f(1) + f(x), \quad \forall x > 0$$

Folosind ce am demonstrat anterior, avem :

$$f(x)(1 + \frac{1}{x}) = f(1)(1+x), \quad \forall x > 0$$

În relația inițială, trecând  $x = y = 1$ , obținem :  $f(2f(1)) = 2f(1)$ . Înlocuind  $x$  cu  $2f(1)$  în relația de mai sus, avem :

$$f(2f(1))(1 + \frac{1}{2f(1)}) = f(1)(1 + 2f(1)) \iff 2f(1) + 1 = f(1) + 2(f(1))^2 \iff (2f(1) + 1)(f(1) - 1) = 0$$

Cum  $f(1) > 0$ , este evident că :  $f(1) = 1$ . Rescriind, obținem :

$$f(x)(1 + \frac{1}{x}) = (1+x) \iff xf(x) + f(x) = x + x^2 \iff (x+1)(x - f(x)) = 0, \quad \forall x > 0$$

Deci, singura soluție este identitatea :  $f = 1_{(0,\infty)}$ .

Barem de notare:

Demonstrarea afirmației : " $f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2$ " ..... 3p

Obținerea relației :  $f(x)(1 + \frac{1}{x}) = f(1)(1 + x), \forall x > 0$  ..... 2p

Calcularea lui  $f(1)$  ..... 1p

Concluzionarea si verificarea soluției ..... 1p